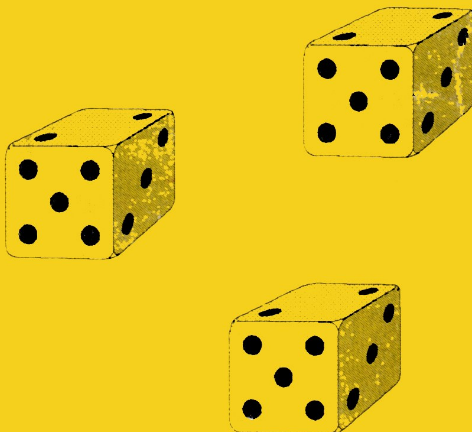
Auksė Medžiaušienė, Marytė Ščerbavičienė

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS moksleiviams

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai



Auksė Medžiaušienė, Marytė Ščerbavičienė

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS moksleiviams

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

UDK 519.1(075)
Me45

Leidinio autorės:

technikos daktarė **AUKSĖ MEDŽIAUŠIENĖ**,
Kauno 49-osios vidurinės mokyklos vyresnioji mokytoja;

MARYTĖ ŠČERBAVIČIENĖ,
Kauno 50-osios vidurinės mokyklos mokytoja.

Redagavo dr. **Bronislovas Burgis**,

maketavo **Giedrius Meinorius.**

ISBN 9986-407-28-1

TURINYS

ĮVADAS

Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys įtraukti į bendrojo lavinimo vidurinių mokyklų matematikos programą. Šių klausimų nėra mokykliniuose matematikos vadovėliuose, uždavinių sprendimo metodika nenagrinėjama.

Šiame leidinyje pateikta medžiaga apima mokyklinę programą. Išspręsti pagrindiniai uždaviniai iš A. Plikuso, R. Razmo ir P.Survilos mokymo priemonių, skirtų šiai matematikos temai mokyklose.

Daugumos uždavinių sprendimai lakoniški, nes manoma, kad mokytojai pamokose plačiau aptars uždavinius, paaiškins kitus sprendimo būdus.

Leidinys skiriamas bendrojo lavinimo mokyklų matematikos mokytojams ir moksleiviams.

Jis gali būti naudingas ir kitų tipų mokymo įstaigoms, kuriose dėstomi kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys.

KOMBINATORIKA

1.1. Apskaičiuokite A_9^2, A_n^1, A_6^6, A_m^3.

Gretiniai $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

$A_9^2 = 9\cdot 8 = 72$, $\qquad A_n^1 = n$,

$A_6^6 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$, $\qquad A_{11}^3 = 11\cdot 10\cdot 9 = 990$.

1.2. Valgykloje pietums renkamės vieną iš 3 pirmųjų patiekalų, vieną iš 4 antrųjų patiekalų ir vieną iš 2 desertų. Kiek skirtingų pietų variantų galime pasirinkti ?

$A_3^1 \cdot A_4^1 \cdot A_2^1 = 3\cdot 4\cdot 2 = 24$.

1.3. Valgykloje yra dviejų rūšių sriubos, 4 rūšių antrieji patiekalai ir 3 rūšių gėrimai. Keliais būdais Jonukas gali sudaryti sau pietų komplektą iš trijų patiekalų - sriubos, antrojo patiekalo ir gėrimo ?

$2\cdot 4\cdot 3 = 24$.

1.4. Tėtis sūnui perka dviratį. Parduotuvėje yra Šiaulių ir Minsko gamyklos dviračių. Kiekvienos gamyklos dviračiai yra 4 skirtingų spalvų. Be to, kiekvienam dviračiui atšvaitą galima pasirinkti iš 3 skirtingų rūšių. Kiek skirtingų būdų pasirinkti turi berniukas ?

$2_{\text{gamyklos}} \cdot 4_{\text{spalvos}} \cdot 3_{\text{atšvaitai}} = 24$ būdai.

1.5. Parduotuvėje parduodami arbatos puodukai po 75, 70, 60, 50 ir 40 centų bei lėkštelės po 58, 42 ir 32 centus.

1) Kiek galima sudaryti įvairių komplektų, susidedančių iš vieno puoduko ir vienos lėkštelės ?

2) Koks komplektas bus pigiausias ir koks brangiausias ?

3) Ar yra vienodos kainos skirtingų komplektų ?

1) $3 \cdot 5 = 15$;

2) brangiausias komplektas už $75 + 58 = 133$ ct,

pigiausias - $40 + 30 = 72$ ct;

3) taip, yra: $60 + 42 = 102$ ct, $70 + 32 = 102$ ct.

1.6. Rinkimuose į Lietuvos Seimą rinkėjas gavo 3 biuletenius: referendumo dėl Lietuvos Konstitucijos biuletenį, biuletenį su 6 pavardėmis ir biuletenį su 17 partijų sąrašu. Kiek galimybių pasirinkti balsuojant turėjo neapsisprendęs balsuotojas ?

Referendumo biuletenyje galima pažymėti arba "taip", arba "ne", arba biuletenį sugadinti. Rinkimų biuleteniuose galima nepažymėti nei vieno sąrašo elemento, pažymėti 1, 2, ..., arba pažymėti visus elementus.
Iš viso pasirinkimo variantų yra $3 \cdot 7 \cdot 18 = 378$.

1.7. Keliais būdais galima sudėti lentynoje vieną šalia kitos 3 skirtingas knygas ?

$3_{\text{1 vieta}} \cdot 2_{\text{2 vieta}} \cdot 1_{\text{3 vieta}} = 6$.

1.8. Kiek skirtingų trispalvių vėliavėlių su trimis horizontaliosiomis juostomis galima sudaryti iš raudonos, mėlynos ir baltos spalvų ?

$3_R \cdot 2_M \cdot 1_B = 6$.

1.9. Kiek yra būdų sudaryti trispalvę (su vertikaliomis vienodo pločio juostomis) vėliavėlę, turint penkių skirtingų spalvų audinio ?

$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

1.10. Kiek yra penkiaženklių skaičių ?

Pirmas skaitmuo negali būti 0, todėl yra 9 galimybės;
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$.

1.11. Kiek keturženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaitmenų:

a) 1, 2, 3, 4 ? **b) 0, 1, 2, 3 ?**

Kėliniai	$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$.

a) $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = 4!$;

b) Pirmasis skaitmuo negali būti 0, todėl parinkti pirmąjį skaitmenį yra 3 galimybės, antrąjį - 3, trečiąjį - 2, ketvirtąjį - 1 galimybė.
Iš viso yra $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ skaičių.

1.12. Kiek skirtingų, neturinčių vienodų skaitmenų, triženklių skaičių galima sudaryti naudojant skaitmenis 1, 2, 3, 4 ?

Pirmąjį skaitmenį renkame iš 4, antrąjį - iš 3, trečiąjį - iš 2.
$4_{I} \cdot 3_{II} \cdot 2_{III} = 24$.

1.13. Kiek penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 4, 6, 7, 8 ? Nė vienas skaitmuo sudarytame skaičiuje neturi kartotis. Kiek tų skaičių yra lyginiai ?

Pirmą skaitmenį renkamės iš šešių, antrąjį - iš 5 ir t.t.
$A_6^5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$;

Paskutinįjį lyginį skaitmenį galima parinkti iš keturių (2, 4, 6 arba 8), o likusiuosius - A_5^4 būdais:

$A_5^4 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 480$.

1.14. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti naudojant skaitmenis 1, 2, 3, 4.

$4_{I} \cdot 4_{II} \cdot 4_{III} = 64$.

1.15. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 sudaromi triženkliai skaičiai. Kiek galima sudaryti lyginių triženklių skaičių, turinčių skirtingus skaitmenis ? Kiek nelyginių ?

Yra dvi galimybės parinkti paskutinįjį lyginį skaitmenį (2 arba 4): $A_4^2 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$;

Yra trys galimybės parinkti nelyginį paskutinįjį skaitmenį (1, 3 arba 5): $A_4^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

1.16. Futbolo pirmenybėse dalyvauja 16 komandų. Kiek yra būdų joms pasiskirstyti pirmąsias 3 vietas ?

$A_{16}^3 = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$.

1.17. Birutė perka sau, sesutei ir broliukui po vieną skirtingų spalvų pieštuką. Parduotuvėje yra 10 skirtingų spalvų pieštukų. Kelias skirtingais būdais Birutė gali parinkti pieštukus ?

$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

1.18. Reikia nudažyti tris namus. Kiekvienam jų galima parinkti vieną iš 6 spalvų;

a) keliais skirtingais būdais tai galima padaryti ?
b) kiek yra būdų nudažyti namus skirtingomis spalvomis ?

a) $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$; b) $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

1.19. Daugiakampio viršūnes žymime skirtingomis didžiosiomis raidėmis. Kiek yra būdų sužymėti 25-iomis lotynų abėcėlės raidėmis trikampio viršūnes ? Penkiakampio viršūnes ?

$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\ 800$;

$A_{25}^5 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 6\ 375\ 600$.

1.20. Pasirinkite keturias skirtingas raides ir suskaičiuokite, keliais būdais galima pažymėti keturkampio viršūnes tomis raidėmis? Dešimtkampio dešimčia raidžių? n-kampio n raidėmis?

Keturkampio žymėjimo yra $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ būdai;
dešimtkampio - $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ būdų;
n-kampio - $n!$ būdų.

1.21. Turime 8 skirtingas poras pirštinių. Kiek yra būdų pasirinkti vieną kairės rankos ir vieną dešinės rankos skirtingų porų pirštinę ?

$A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$.

1.22. Šeima, gyvenanti Vilniuje, vasarą nutarė pailsėti Palangoje. Iš Vilniaus į Palangą vykti ir grįžti jie nori per Kauną. Iš Vilniaus į Kauną galima nuvažiuoti traukiniu arba autobusu, o iš Kauno į Palangą – traukiniu, autobusu, laivu arba lėktuvu. Keliais skirtingais būdais šeima gali pasirinkti maršrutą iš Vilniaus į Palangą ir atgal taip, kad jokioje kelio dalyje nenaudotų to paties transporto?

$V. \begin{Bmatrix} \text{Aut.} \\ \text{Tr.} \end{Bmatrix} K. \begin{Bmatrix} \text{Aut.} \\ \text{Tr.} \\ \text{Lėkt.} \\ \text{Laiv.} \end{Bmatrix} P.$

Aut. - Laiv. - Lėkt. - Tr.
Aut. - Lėkt. - Laiv. - Tr.
Tr. - Laiv. - Lėkt. - Aut.
Tr. - Lėkt. - Laiv. - Aut.
Iš viso 4 būdai

1.23. Miestus A ir B jungia trys keliai, o miestus B ir C - keturi keliai. Kiek yra būdų nuvažiuoti iš A į C per B ir grįžti į A ?

Pirmyn yra $3 \cdot 4 = 12$ kelių, atgal - $4 \cdot 3 = 12$ kelių;
iš viso $12 \cdot 12 = 144$ kelių.

1.24. Kiek yra mažesnių už 1000 natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 5 ?

Iki dešimties yra tik skaičius 5;
nuo dešimties iki šimto - $9 \cdot 2 = 18$ skaičių
(gale arba 0, arba 5);
nuo šimto iki tūkstančio - $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ skaičių
(pirmasis skaitmuo negali būti 0);
Iš viso yra $1 + 18 + 180 = 199$ skaičiai.

1.25. Kiek yra ne mažesnių už 100 ir mažesnių už 10000 natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 5 ?

Paskutinysis skaitmuo turi būti 0 ar 5, o pirmasis skaitmuo negali būti 0;

nuo 100 iki 999 tokių skaičių yra $9 \cdot 10 \cdot 2$, o iš viso sąlygoje nurodytų skaičių yra $9 \cdot 10 \cdot 2 + 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1980$.

1.26. Įmonės pavadinimui sudaryti pasirinktos 6 skirtingos raidės. Kiek iš jų galima sugalvoti įmonės pavadinimų, kurie sudarytų ne mažiau kaip 3 ir ne daugiau kaip 5 skirtingas raides ?

$$A_6^3 + A_6^4 + A_6^5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1200.$$

1.27. Apskaičiuokite C_9^6, C_{11}^4, C_{15}^6. Keliais būdais galima pažymėti 6 skaičius iš 49 loto kortelėje ?

Deriniai $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $C_n^k = C_n^{n-k}$.

$$C_9^6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84;$$

$$C_{15}^6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 5005; \quad C_{11}^4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330;$$

$$C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\ 983\ 816.$$

1.28. Keliais būdais skaitytojas gali išsirinkti 2 knygas iš 3 ? (Knygų paėmimo tvarka nesvarbi).

$$C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3.$$

1.29. Iš keturių gabiausių klasės matematikų reikia išrinkti tris dalyvauti mokyklos matematikų olimpiadoje. Keliais būdais galima tai padaryti ?

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

1.30. Mokykloje veikia 4 bureliai. Mokinys nutarė lankyti 2 būrelius. Kiek yra pasirinkimo variantų ?

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

1.31. Žemės ūkio bandymų stotis ūkininkams rekomenduoja 4 veislių miežių ir 5 veislių žirnių sėklas. Kiek galimybių pasirinkti turi ūkininkas:

a) dviejų veislių miežių sėklas ?
b) trijų veislių miežių sėklas ?
c) dviejų veislių miežių ir dviejų veislių žirnių sėklas ?

a) $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$; b) $C_4^3 = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$;

c) Žirnių sėklių pasirinkimo yra $C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ būdų,

miežių - $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ būdai.

Iš viso yra $6 \cdot 10 = 60$ galimybių.

1.32. Knygyne yra šešių skirtingų pavadinimų knygų. Keliais būdais galima nusipirkti:

a) dvi skirtingas knygas ?
b) keturias skirtingas knygas ?

a) $C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$; $C_n^k = C_n^{n-k}$; b) $C_6^4 = C_6^{6-4} = C_6^2 = 15$.

1.33. Išspręskite lygtį $C_n^{12} = C_n^8$.

$C_n^{12} = C_n^{n-12}$;

$C_n^{n-12} = C_n^8$;

$n - 12 = 8$; $n = 20$.

1.34. Išspręskite lygtį $A_n^4 / C_{n-1}^3 = 60$.

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \Big/ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 60$$

$6n = 60$; $n = 10$.

1.35. Klasėje yra 20 mokinių. Kasdien 3 iš jų turi budėti.

a) Kiek dienų galės budėti vis kitas trejetas ?
b) Kiek kartų per tas dienas teks budėti kiekvienam mokiniui ?

a) $C_{20}^{3}=\frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3}=1140$;

b) $C_{20}^{3}-C_{19}^{3}=\frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3}-\frac{19\cdot18\cdot17}{1\cdot2\cdot3}=1140-969=171$.

1.36. Apskritime pažymėta 10 taškų.

a) Kiek galima nubrėžti trikampių, kurių viršūnės būtų pažymėtuose taškuose ?

b) Kiek galima nubrėžti dešimtkampių ?

a) $C_{10}^{3}=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=120$; b) $C_{10}^{10}=1$.

1.37. Jurgiukas turi aštuonis skirtingų spalvų pieštukus. Keliais būdais jis gali duoti sesutei 3 pieštukus ?

$C_{8}^{3}=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56$.

1.38. Raskite, kiek yra mažesnių už 1000 natūraliųjų skaičių, sudarytų naudojant skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5.

Gali kartotis tas pats skaitmuo.

Vienaženklių skaičių yra 5, dviženklių - $5\cdot5=25$,

triženklių - $5\cdot5\cdot5=125$.

Iš viso yra $5+25+125=155$ skaičiai.

1.27. Raskite, kiek yra mažesnių už 10000 natūraliųjų skaičių, sudarytų naudojant skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5 ir neturinčių vienodų skaitmenų.

$$\underbrace{5}_{\text{Vienaženklių}}+\underbrace{5\cdot4}_{\text{Dviženklių}}+\underbrace{5\cdot4\cdot3}_{\text{Triženklių}}+\underbrace{5\cdot4\cdot3\cdot2}_{\text{Keturženklių}}=205.$$

1.39. Naujagimiui galima suteikti ne daugiau kaip tris vardus. Kiek skirtingų būdų yra parinkti vardus naujagimiui, jei juos reikia rinkti iš trylikos vardų ?

Gali būti vienas vardas - 13 galimybių; gali būti du vardai (tvarka nesvarbi) - $C_{13}^{2}=\frac{13\cdot12}{1\cdot2}=78$ variantai;

gali būti trys vardai - $C_{13}^{3}=\frac{13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3}=286$ variantai;

iš viso yra $13+C_{13}^{2}+C_{13}^{3}=13+78+286=377$ būdai.

1.40. Septintos klasės mokiniai gali pasirinkti kai kuriuos mokomuosius dalykus. Mažos mokyklos septintokams pasirinkti siūlomi 3 dalykai savo mokykloje ir dar 5 dalykai gretimoje didesnėje mokykloje. Kiek galimybių pasirinkti turi septintokas, jei jam leidžiama pasirinkti:

a) vieną dalyką; b) du dalykus; c) tris dalykus;
d) ne daugiau, kaip du dalykus;
e) ne daugiau, kaip tris dalykus;
f) keturis dalykus ?

a) 8 galimybės; b) $C_{8}^{2}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28$; c) $C_{8}^{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56$;

d) $C_{8}^{1}+C_{8}^{2}=8+28=36$;

e) $C_{8}^{1}+C_{8}^{2}+C_{8}^{3}=8+28+56=92$;

f) $C_{8}^{4}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$.

1.41. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sudaromi šešiaženkliai skaičiai. Kiekvienas skaičius turi po 3 lyginius ir 3 nelyginius skaitmenis ir nei vienas skaitmuo skaičiuje nesikartoja. Kiek galima sudaryti tokių šešiaženklių skaičių?

Iš penkių nelyginių ir keturių lyginių skaitmenų paimti po tris skaitmenis galima $C_{5}^{3}\cdot C_{4}^{3}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 4=40$-čia būdų.

Kiekviename šešiaženkliame skaičiuje keisdami skaitmenis vietomis gauname $6!=720$ variantų.

Taigi iš viso galima sudaryti $40\cdot 720=28800$ skaičių.

1.42. Kiek įstrižainių turi iškilasis dvidešimtkampis? Raskite daugiakampio, turinčio 35 įstrižaines, kraštinių skaičių.

Dvidešimtkampio viršūnes galima sujungti C_{20}^{2} tiesėmis.

20 jų yra daugiakampio kraštinės,

todėl įstrižainių yra $C_{20}^{2}-20=\dfrac{20\cdot 19}{1\cdot 2}-20=170$;

Daugiakampis su 35 įstrižainėmis turi n viršūnių.

$C_{n}^{2}-n=35$;

$\dfrac{n(n-1)}{2}-n=35$

$n^{2}-3n-70=0$,

$n_{1}=10$, $\quad n_{2}=-7$ - netinka, nes $n\in N$.

Ats.: $n=10$.

1.43. Knygyne yra trijų pavadinimų vokiškų knygų, penkių pavadinimų angliškų knygų, septynių pavadinimų lenkiškų knygų ir 10 pavadinimų rusiškų knygų. Kiek skirtingų pasirinkimo galimybių turi pirkėjas, jei jis nori pirkti:

a) vieną knygą;
b) dvi skirtingų kalbų knygas;
c) ne daugiau, kaip dvi skirtingų kalbų knygas;
d) tris skirtingų kalbų knygas;
e) ne daugiau, kaip tris skirtingų kalbų knygas;
f) tris (bet kokias) skirtingų pavadinimų knygas ?

Yra 3V, 5A, 7L ir 10R knygų. a) 25 galimybės;

b)

VA	$3\cdot 5=15$
VL	$3\cdot 7=21$
VR	$3\cdot 10=30$
AL	$5\cdot 7=35$
AR	$5\cdot 10=50$
LR	$7\cdot 10=70$
Iš viso	221

c) $25+221=246$;

d)

VAL	$3\cdot 5\cdot 7=105$
VAR	$3\cdot 5\cdot 10=150$
VLR	$3\cdot 7\cdot 10=210$
ALR	$5\cdot 7\cdot 10=350$
Iš viso	815

e) $815+3\cdot 7\cdot 10=1025$; f) $C_{25}^{3}=\dfrac{25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3}=2300$.

1.44. 9 kortelėse parašyti skaitmenys 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3. Kiek devynženklių skaičių galima sudaryti iš tų kortelių ?

Kėliniai su pasikartojimu	$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}=P_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)}$.

$$\frac{9!}{3!3!3!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3}=1680.$$

1.45. Jonukas nusipirko loto "4 iš 25" kortelę. Kiek yra "laimingų" ketvertukų, jei laimi kortelė, kurioje teisingai nurodyti bent 2 skaičiai ?

Galima įsivaizduoti, kad kortelėje yra 4 "geri" ir 21 "blogas" skaičius.

Pažymėti visus keturis "gerus" skaičius yra $C_4^4=1$ būdas.

Pažymėti tris "gerus" ir vieną "blogą" yra $C_4^3\cdot C_{21}^1=4\cdot21=84$ būdai.

Pažymėti du "gerus" ir du "blogus" skaičius - $C_4^2\cdot C_{21}^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\frac{21\cdot20}{1\cdot2}=6\cdot210=1260$ būdų.

Iš viso "laimingų" ketvertukų yra $1+84+1260=1345$.

Iš viso kortelę galima pažymėti $C_{25}^4=\frac{25\cdot24\cdot23\cdot22}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=12650$ būdų, todėl
"nelaimingų" ketvertukų yra $12650-1345=11305$.

1.46. Petras nusipirko loto "5 iš 36" kortelę. Kiek yra laimingų penketų, jei laimi kortelė, kurioje teisingai nurodyti bent 3 skaičiai ?

$$C_5^5+C_5^4\cdot C_{31}^1+C_5^3\cdot C_{31}^2=1+155+4650=4806.$$

1.47. Finalinėse krepšinio varžybose komandos A ir B žaidžia tarpusavyje tol, kol viena iš jų pasiekia 4 pergales. Sudaroma laimėjusių komandų pavadinimų seka (pavyzdžiui AABBAA). Kiek tokių skirtingų sekų galima sudaryti, t.y. keliais skirtingais būdais gali vykti finalinės varžybos ?

a) visas keturias rungtynes laimi A komanda: $C_4^0=1$;

b) vienerias rungtynes laimi B komanda, ketverias A komanda (B negali būti sekos gale): $C_4^4 = 1$;

c) dvejas rungtynes laimi B komanda, ketverias A komanda (B negali būti sekos gale): $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$;

d) trejas rungtynes laimi B komanda, ketverias A komanda: $C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

Iš viso yra $1 + 4 + 10 + 20 = 35$ galimybės finalines varžybas laimėti A komandai, tiek pat - laimėti B komandai.

Ats.: 70.

1.48. Studentas dešimt savaičių turi laikyti po egzaminą kas savaitę. Du iš dešimties yra matematikos egzaminai. Kiek yra būdų sudaryti egzaminų laikymo eilę, kad matematikos egzaminų netektų laikyti vieną po kito ?

Matematikos egzaminus išdėstyti galima $2 \cdot 8 + 8 \cdot 7 = 72$ būdais (pirmasis - bet kurią savaitę, antrajam lieka 8 galimybės, jei pirmasis - pirmąją arba paskutiniąją savaitę, ir 7 galimybės, jei pirmasis - 2-9 savaitę).

Kitus egzaminus galima išdėstyti 8! būdais.

Iš viso yra $8! \cdot 72 = 2903040$ būdų.

1.49. 8 turistus reikia apgyvendinti dviejuose viešbučio kambariuose taip, kad kiekviename būtų ne mažiau kaip 3 žmonės. Keliais skirtingais būdais tai galima padaryti ?

Pirmajame kambaryje galima apgyvendinti

tris turistus ($C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ variantai),

keturis turistus ($C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ variantų) arba

penkis turistus ($C_8^5 = C_8^3 = 56$ variantai).

Likusieji turistai kiekvienu atveju bus apgyvendinti antrajame kambaryje.

Iš viso yra $56+70+56=182$ paskirstymo būdai.

1.50. 10 darbininkų reikia suskirstyti į dvi brigadas taip, kad kiekvienoje brigadoje būtų ne mažiau kaip 4 žmonės. Keliais būdais tai galima padaryti ?

$$C_{10}^{4}+C_{10}^{5}+C_{10}^{6}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=$$
$$=210+252+210=672.$$

1.51. Kiek dėmenų yra binomo $(m+n)^{100}$ skleidinyje ?

> Niutono binomas:
> $$(a+b)^n=C_n^0 a^n b^0+C_n^1 a^{n-1}b+C_n^2 a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^n a^0 b^n.$$
> Skleidinio narys (k nuo 0 iki n) yra $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$.

Skleidinys prasideda nuo nulinio nario, iš viso yra 101 narys:

$$(m+n)^{100}=C_{100}^0 m^{100}n^0+C_{100}^1 m^{99}n+C_{100}^2 m^{98}n^2+\ldots+C_{100}^{100}m^0 n^{100}=$$
$$=m^{100}+100m^{99}n+4950m^{98}n^2+\ldots$$

1.52. Raskite binomo $(1+x)^{50}$ skleidinio 20-ąjį narį ir koeficientą prie x^{10}.

$$T_{20}=T_{19+1}=C_{50}^{19}\cdot 1\cdot x^{19};$$
$$T_{k+1}=C_{50}^{k}\cdot 1\cdot x^{k};$$
$$T_{11}=C_{50}^{10}\cdot x^{10},$$ koeficientas - C_{50}^{10}.

1.53. Atskliauskite:

$$\left(\tfrac{1}{2}a+1\right)^6=C_6^0\left(\tfrac{1}{2}a\right)^6+C_6^1\left(\tfrac{1}{2}a\right)^5+C_6^2\left(\tfrac{1}{2}a\right)^4+\ldots+C_6^6\left(\tfrac{1}{2}a\right)^0=$$
$$=\frac{1}{64}a^6+\frac{3}{16}a^5+\frac{15}{16}a^4+\ldots+3a+1;$$

$$\left(x^2-x^3\right)^6=C_6^0\left(x^2\right)^6\left(x^3\right)^0+C_6^1\left(x^2\right)^5\left(x^3\right)^1+\ldots+C_6^6\left(x^2\right)^0\left(x^3\right)^6;$$

$$\left(x^2(1-x)\right)^6=x^{12}\left(C_6^0+C_6^1x+C_6^2x^2+C_6^3x^3+C_6^4x^4+C_6^5x^5+C_6^6x^6\right)=$$
$$=x^{12}\left(1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6\right);$$

$$(3-6a)^5=(3+(-6a))^5=C_5^0 3^5(-6a)^0+C_5^1 3^4(-6a)+\ldots+C_5^5(-6a)^5=$$
$$=3^5-5\cdot 3^4\cdot 6a+-\ldots-6^5a^5;$$

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right)^5=\left(1+\left(-\tfrac{1}{2}x\right)\right)^5=C_5^0 1^5\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^0+C_5^1\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^1+\ldots+C_5^5\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^5=$$
$$=1-\frac{5}{2}x+-\ldots-\frac{1}{2}x^5.$$

1.54. Remdamiesi $(1+x)^n\approx 1+nx$ formule, apytiksliai apskaičiuokite $0{,}997^{20}$ ir $1{,}004^5$.

$$0{,}997^{20}=(1+(-0{,}003))^{20}\approx 1+20(-0{,}003)\approx 1-0{,}06\approx 0{,}94;$$

$$1{,}004^5=(1+0{,}004)^5\approx 1+5\cdot 0{,}004\approx 1{,}02.$$

1.55. Įrodykite, kad kintant r nuo 1 iki n, skaičiai C_n^r iš pradžių didėja, po to mažėja, o didžiausi yra sekos viduryje. Kitaip sakant, įrodykite, kad kai n lyginis, tai $C_{2k}^0<C_{2k}^1<\ldots<C_{2k}^k$, $C_{2k}^k>C_{2k}^{k+1}>\ldots>C_{2k}^{2k}$, o kai n nelyginis, tai $C_{2k+1}^0<C_{2k+1}^1<\ldots<C_{2k+1}^k$, $C_{2k+1}^{k+1}>C_{2k+1}^{k+2}>\ldots>C_{2k+1}^{2k+1}$.

Įrodysime lyginiam $n=2k$:

$$\frac{C_{2k}^{r+1}}{C_{2k}^r}=\frac{(2k)!\ r!\ (2k-r)!}{(r+1)!\ (2k-r-1)!\ (2k)!}=\frac{2k-r}{r+1},\ \text{nes}$$

$$(r+1)!=r!\cdot(r+1),\quad (2k-r)!=(2k-r-1)!\cdot(2k-r).$$

Jei seka $a_1,a_2,\ldots,a_n$ yra didėjanti, tai $\frac{a_{r+1}}{a_r}>1$, todėl

tiriame nelygybę $\frac{2k-r}{r+1}>1$, $2k-r>r+1$, $2(k-r)>1$.

Nelygybė teisinga, kai $r<k$;

tuo atveju teisinga ir nelygybė $C_{2k}^{r+1}>C_{2k}^r$.

Vadinasi, nuo $r=0$ iki $r=k-1$ koeficientai didėja, po to - mažėja.

Su nelyginiais binominiais koeficientais įrodoma analogiškai.

1.56. Raskite skleidinio $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^n$ didžiausiąjį narį.

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^n = C_n^0\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^0+\ldots+C_n^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k+\ldots+C_n^n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-n}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Pastebime, kad užtenka nagrinėti skaičių $C_n^k\cdot 3^k$,

t.y. rasti, su kokia k reikšme šis skaičius yra didžiausias.

Didinant k, nariai didėja, kol $\dfrac{C_n^{k+1}\cdot 3^{k+1}}{C_n^k\cdot 3^k}>1$,

$$\frac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot 3^{k+1}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot 3^k}>1, \qquad \frac{(n-k)\cdot 3}{k+1}>1,$$

$$3n-3k>k+1, \qquad \frac{3n-1}{4}>k.$$

Kai $r=\dfrac{3n-1}{4}$ yra sveikasis skaičius, tai yra du lygūs

didžiausi nariai $C_n^r\dfrac{3^r}{4^n}$ ir $C_n^{r+1}\dfrac{3^{r+1}}{4^n}$;

Kitais atvejais didžiausias narys yra $C_n^r\dfrac{3^{r+1}}{4^n}$,

čia r yra skaičiaus $\dfrac{3n-1}{4}$ sveikoji dalis.

1.57. Apskaičiuokite:

$$\sum_{k=1}^{4}(k-2)=(1-2)+(2-2)+(3-2)+(4-2)=2.$$

1.58. Apskaičiuokite:

$$\sum_{y=1}^{4}\left(y^2-4y+1\right)=\begin{pmatrix}(1-4+1)+\left(2^2-4\cdot 2+1\right)+\\ +\left(3^2-4\cdot 3+1\right)+\left(4^2-4\cdot 4+1\right)\end{pmatrix}=-6.$$

1.59. Apskaičiuokite:

$$\sum_{i=1}^{100}4=4+4+\ldots+4=400.$$

1.60. Apskaičiuokite:

$$\sum_{i=0}^{4} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31 .$$

1.61. Apskaičiuokite:

$$\sum_{k=0}^{5} p^k = p^0 + p^1 + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 .$$

1.62. Apskaičiuokite:

$$\sum_{k=1}^{4} (k+a) + 1 = (1+a) + (2+a) + (3+a) + (4+a) + 1 = 4a + 11 .$$

1.63. Apskaičiuokite:

$$\sum_{x=2}^{4} (x+1)^2 = (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 = 50 .$$

1.64. Apskaičiuokite:

$$\sum_{y=1}^{4} y^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 .$$

1.65. Apskaičiuokite:

$$\sum_{y=0}^{4} \left(x^2 + y^2\right) = \left(x^2 + 0^2\right) + \left(x^2 + 1^2\right) + \left(x^2 + 2^2\right) +$$
$$+ \left(x^2 + 3^2\right) + \left(x^2 + 4^2\right) = 5x^2 + 30.$$

TIKIMYBIŲ TEORIJA

2.1. Metame lošimo kauliuką. Kokia tikimybė, kad atsivers trys akutės ? Daugiau kaip trys akutės ? Mažiau kaip trys akutės ?

Elementariųjų įvykių aibė $E=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, $n=6$;

a) A - atsivers trys akutės. $A=\{3\}$, $m=1$, $P(A)=\frac{1}{6}$;

b) B - atsivers daugiau, kaip trys akutės.

$B=\{4;5;6\}$, $m=3$, $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

c) C - atsivers mažiau, kaip tys akutės.

$C=\{1;2\}$, $m=2$, $P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2.2. Krepšyje sudėta 10 kamuolių. Jie sunumeruoti nuo 1 iki 10. Nesirenkant išimami du kamuoliai. Kokia tikimybė, kad tai bus 2-asis ir 5-asis kamuoliai ?

Elementariųjų įvykių aibė:

$$E=\left\{\begin{matrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & (1,7) & (1,8) & (1,9) & (1,10) \\ & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & (2,7) & (2,8) & (2,9) & (2,10) \\ & & (3,4) & (3,5) & (3,6) & (3,7) & (3,8) & (3,9) & (3,10) \\ & & & (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) & (4,9) & (4,10) \\ & & & & (5,6) & (5,7) & (5,8) & (5,9) & (5,10) \\ & & & & & (6,7) & (6,8) & (6,9) & (6,10) \\ & & & & & & (7,8) & (7,9) & (7,10) \\ & & & & & & & (8,9) & (8,10) \\ & & & & & & & & (9,10) \end{matrix}\right\},\ n=45.$$

n galima apskaičiuoti taip: $n=C_{10}^{2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$.

A - išimtas 2-asis ir 5-asis kamuoliai.

$A=\{2,5\}$, $m=1$, $P(A)=\frac{1}{45}$.

2.3. Iš dėžės, kurioje yra 10 baltų ir 6 juodi rutuliai, atsitiktinai imami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai juodi ?

A - atsitiktinai išimti abu rutuliai juodi.

Iš viso elementariųjų įvykių yra $n = C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$.

Palankių įvykiui A elementariųjų įvykių yra

$m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$, $P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$.

2.4. Dėžėje yra 6 balti ir 8 raudoni rutuliai. Atsitiktinai traukiami 5 rutuliai. Kokia tikimybė, kad 2 iš jų bus balti, o 3 - raudoni ?

A - iš atsitiktinai ištrauktų penkių rutulių du yra balti, o trys raudoni. Iš viso elementariųjų įvykių yra $n = C_{14}^5$.

Įvykiui A palankių elementariųjų įvykių yra $m = C_6^2 \cdot C_8^3$,

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_8^3}{C_{14}^5}.$$

2.5. Dėžėje yra 12 baltų ir 8 juodi vienodo didumo rutuliai.

1) Nesirenkant išimti du rutuliai. Kokia tikimybė,kad jie skirtingų spalvų ?

2) Nesirenkant išimti aštuoni rutuliai.

a) Kokia tikimybė, kad trys iš jų juodi ?

b) Kokia tikimybė, kad juodų rutulių išimta ne daugiau kaip trys ?

1) Apskaičiuojame, kiek elementariųjų įvykių yra iš viso:

$n = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$.

A - paimti du skirtingų spalvų rutuliai. Palankių įvykiui A elementariųjų įvykių skaičius $m = C_8^1 \cdot C_{12}^1 = 8 \cdot 12 = 96$,

$P(A) = \frac{96}{190} = \frac{48}{95}$;

2) a) $n = C_{20}^8$, $m = C_8^3 \cdot C_{12}^5$, $P(A) = \frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}$,

b) $n = C_{20}^{8}$. Įvykiui A - juodų rutulių išimta ne daugiau kaip trys palankūs tokie įvykiai: A_1 - išimti trys juodi rutuliai, $m_1 = C_8^3 \cdot C_{12}^5$, $P(A_1) = \frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}$; A_2 - išimti du juodi rutuliai, $m_2 = C_8^2 \cdot C_{12}^6$, $P(A_2) = \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^6}{C_{20}^8}$; A_3 - išimtas vienas juodas rutulys, $m_3 = C_8^1 \cdot C_{12}^7$, $P(A_3) = \frac{C_8^1 \cdot C_{12}^7}{C_{20}^8}$;

A_4 - išimti tik balti rutuliai", $m_4 = C_{12}^8$, $P(A_4) = \frac{C_{12}^8}{C_{20}^8}$;

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) =$$
$$= \frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5 + C_8^2 \cdot C_{12}^6 + C_8^1 \cdot C_{12}^7 + C_{12}^8}{C_{20}^8}.$$

2.6. Kokia tikimybė, kad iš naujo 1994 metų kalendoriaus atsitiktinai išplėštas lapelis bus trisdešimtosios dienos ?

A - atsitiktinai išplėštas kalendoriaus lapelis yra 30-osios dienos.

Iš viso kalendoriuje yra 365 lapeliai, $n = 365$.

Lapelių su "30" yra 11, $m = 11$, $P(A) = \frac{11}{365}$.

2.7. Kokia tikimybė, kad iš naujo 1994 metų kalendoriaus atsitiktinai išplėštame lapelyje esantis skaičius dalijasi iš 6 ?

A - atsitiktinai išplėštame kalendoriaus lapelyje esantis skaičius dalijasi iš 6.

Vienuolikoje mėnesių yra po 5 skaičiaus 6 kartotinius (6, 12, 18, 24, 30), o vasaryje yra 4 kartotiniai (6, 12, 18, 24). Iš viso yra 365 lapeliai, $n=365$. Lapelių, su skaičiaus 6 kartotiniais yra $11\cdot 5+4=59$, $m=59$, $P(A)=\frac{59}{365}$.

2.8. Darius, rinkdamas telefono numerį, pamiršo 2 paskutinius skaitmenis ir, žinodamas, kad tie skaitmenys yra skirtingi, surinko juos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad telefono numeris surinktas teisingai ?

A - vieno dviženklio skaičiaus su skirtingais skaitmenimis surinkimas. $n=A_{10}^2=10\cdot 9=90$, $P(A)=\frac{1}{90}$.

2.9. Tarp 100 detalių 5 yra brokuotos. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtos 3 detalės bus nebrokuotos ?

Yra 95 kokybiškos detalės ir 5 brokuotos.
A - atsitiktinai paimtos trys detalės bus nebrokuotos.
Iš viso elementariųjų įvykių yra $n=C_{100}^3$. Palankių įvykiui A elementariųjų įvykių yra $m=C_{95}^3$, $P(A)=\frac{C_{95}^3}{C_{100}^3}$.

2.10. Tvenkinyje yra 30 lydekų. Sugavo 5 lydekas. Jas pažymėjo ir vėl paleido. Antrą kartą sugavo 7 lydekas. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus dvi pažymėtos ?

Iš viso yra 30 lydekų: 5 pažymėtos ir 25 nepažymėtos.
A - iš 7 lydekų 2 yra pažymėtosios lydekos.
$n=C_{30}^7$. Palankių įvykiui A elementariųjų įvykių yra $m=C_5^2\cdot C_{25}^5$, $P(A)=\frac{C_5^2\cdot C_{25}^5}{C_{30}^7}$.

2.11. Klasėje yra 13 mergaičių ir 12 berniukų. Reikia išrinkti 3 moksleivių delegaciją. Kokia tikimybė,

kad į delegaciją pateks 2 mergaitės ir 1 berniukas ?

$$n = C_{25}^{3},\ m = C_{13}^{2} \cdot C_{12}^{1},\ P(A) = \frac{C_{13}^{2} \cdot C_{12}^{1}}{C_{25}^{3}}.$$

2.12. 36 kortų kaladę padalijome pusiau. Kokia tikimybė, kad kiekvienoje dalyje yra po 2 tūzus ?

$$n = C_{36}^{18},\ m = \frac{C_{4}^{2} \cdot C_{32}^{16}}{2} = 0{,}5 \cdot C_{4}^{2} \cdot C_{32}^{16},\ P(A) = \frac{0{,}5 \cdot C_{4}^{2} \cdot C_{32}^{16}}{C_{36}^{18}}.$$

2.13. Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, atsitiktinai ištrauktos 5 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp jų yra bent vienas tūzas ?

A - tarp iš kortų kaladės atsitiktinai ištrauktų penkių kortų yra bent vienas tūzas.

Priešingas įvykis $\overline{A}$ - tarp iš kortų kaladės atsitiktinai ištrauktų penkių kortų nėra nė vieno tūzo. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Iš viso elementariųjų įvykių yra $n = C_{36}^{5}$.

Palankių įvykiui $\overline{A}$ elementariųjų įvykių yra $m = C_{32}^{5}$,

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{32}^{5}}{C_{36}^{5}},\ P(A) = 1 - \frac{C_{32}^{5}}{C_{36}^{5}} = \frac{C_{36}^{5} - C_{32}^{5}}{C_{36}^{5}}.$$

2.14. Devynios kortelės, pažymėtos skaitmenimis nuo 1 iki 9. Nesirenkant imamos keturios kortelės ir dedamos viena greta kitos. Gaunamas keturženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad jis bus lyginis ?

Keturženklių skaičių iš skirtingų devynių skaitmenų yra $n = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

A - sudėtas lyginis keturženklis skaičius.

Šiam įvykiui palankių elementariųjų įvykių yra

$$m = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4,\ P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4}{9}.$$

2.15. Penkios vienodos kortelės, kuriose parašytos raidės A, D, E, L, S atsitiktinai dedamos į eilę. Kokia tikimybė sudėti žodį LEDAS ?

Skirtingų žodžių yra $n=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5!=120$.

A - sudėtas žodis LEDAS. $A=\{\text{LEDAS}\}$, $m=1$, $P(A)=\dfrac{1}{120}$.

2.16. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai sustatę į eilę kubus, kurių sienose parašytos raidės a, a, a, k, k, v, gausime žodį "kakava" ?

A - atsitiktinai sustatę į eilę raides a, a, a, k, k, v gausime žodį kakava.

Iš viso elementariųjų įvykių yra $n=\dfrac{6!}{3!2!}$

(pasinaudojame kėlinių su pasikartojimais formule).

$A=\{\text{kakava}\}$, $m=1$, $P(A)=\dfrac{1}{n}=\dfrac{3!2!}{6!}$.

2.17. Yra du gydytojai G_1 ir G_2. Du ligoniai atsitiktinai pasirenka gydytoją. Apskaičiuoti tikimybę įvykio A - ligoniai pasirinko skirtingus gydytojus.

Elementariųjų įvykių aibė: $E=\{(G_1G_1),(G_1G_2),(G_2G_1),(G_2G_2)\}$,

$n=4$. $A=\{(G_1G_2),(G_2G_1)\}$, $m=2$, $P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

2.18. Aštuoniose vienodose kortelėse parašyti skaičiai 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Atsitiktinai ištrauktos dvi kortelės. Kokia tikimybė, kad iš šių skaičių sudarytą trupmena galima suprastinti ?

Skaičiai 2, 4, 6, 8 ir 12 yra lyginiai, o 7, 11 ir 13 - pirminiai. Pirminiai skaičiai nedalūs.

A - trupmeną galima suprastinti. $n=A_8^2=8\cdot7=56$.

Palankias baigtis galime gauti tik iš 2, 4, 6, 8 ir 12.

$m=A_5^2=5\cdot4=20$, $P(A)=\dfrac{20}{56}=\dfrac{5}{14}$.

2.19. Iš 10 loterijos bilietų, tarp kurių 2 laimingi, atsitiktinai ištraukti 5 bilietai. Kokia tikimybė, kad iš ištrauktųjų:

a) vienas bilietas laimingas;

b) du bilietai laimingi;

c) bent vienas bilietas laimingas ?

a) $n = C_{10}^5$, $m = C_2^1 \cdot C_8^4$, $P(A) = \dfrac{C_2^1 \cdot C_8^4}{C_{10}^5} = \dfrac{5}{9}$.

b) $n = C_{10}^5$, $m = C_2^2 \cdot C_8^3$, $P(B) = \dfrac{C_2^2 \cdot C_8^3}{C_{10}^5} = \dfrac{2}{9}$.

c) $n = C_{10}^5$. Įvykiui C palankūs (a) ir (b) atveju nagrinėti įvykiai, todėl $P(C) = \dfrac{5}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

2.20. Į eilę ant 7 kėdžių atsitiktinai sodinami 7 berniukai. Raskite tikimybes tokių įvykių:

A - **du berniukai - Petras ir Jonas - susės greta;**

B - **trys berniukai- Petras, Jonas ir Antanas - susės greta.**

Iš viso elementariųjų įvykių yra $n = 7!$.

Greta susėdę Jonas ir Petras gali būti laikomi vienu elementu, tuomet iš 6 elementų kėlinių yra 6!. Jonas ir Petras gali pasikeisti vietomis, todėl elementarių įvykių, palankių įvykiui *A* yra $m = 6! \cdot 2!$, $P(A) = \dfrac{6!2!}{7!} = \dfrac{2}{7}$.

Greta susėdę Petras, Jonas ir Antanas laikomi vienu elementu, o su likusiais 4 berniukais, gauname 5! kėlinių. Petras, Jonas ir Antanas gali keistis vietomis, todėl gauname $m = 5! \cdot 3!$, $P(B) = \dfrac{5!3!}{7!} = \dfrac{3!}{6 \cdot 7!} = \dfrac{1}{7}$.

2.21. 5 berniukai ir 7 mergaitės norėjo eiti į teatrą, bet buvo gauti tik 4 bilietai. Jie turi bilietus pasiskirstyti atsitiktinai. Raskite tikimybes tokių įvykių:

A **- bilietus gavo 2 berniukai ir 2 mergaitės;**
B **- bilietus gavo daugiau berniukų, negu mergaičių;**
C **- bilietus gavo daugiau mergaičių negu berniukų.**

Iš viso elementariųjų įvykių yra $n = C_{12}^{7}$.

Palankių įvykiui A elementariųjų įvykių yra

$$m = C_5^2 \cdot C_7^2,\ P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{12}^7}.$$

$B = B_1 \cup B_2$, čia B_1 - bilietus gavo 3 berniukai ir 1 mergaitė, B_2 - bilietus gavo 4 berniukai. Įvykiui B_1 palankių elementariųjų įvykių yra $m_1 = C_5^3 \cdot C_7^1$, $P(B_1) = \frac{C_5^3 \cdot C_7^1}{C_{12}^4}$.

Įvykiui B_2 palankių elementariųjų įvykių yra $m_2 = C_5^4$,

$$P(B_2) = \frac{C_5^4}{C_{12}^4}.\quad P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{C_5^3 \cdot C_7^1 + C_5^4}{C_{12}^4}.$$

$C = C_1 \cup C_2$, čia C_1 - bilietus gavo 3 mergaitės ir 1 berniukas, C_2 - bilietus gavo 4 mergaitės. Įvykiui C_1 palankių elementariųjų įvykių yra $m_1 = C_7^3 \cdot C_5^1$, $P(C_1) = \frac{C_7^3 \cdot C_5^1}{C_{12}^4}$.

Įvykiui C_2 palankių elementariųjų įvykių yra $m_2 = C_7^4$,

$$P(C_2) = \frac{C_7^4}{C_{12}^4}.\quad P(C) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{C_7^3 \cdot C_5^1 + C_7^4}{C_{12}^4}.$$

2.22. Iš 60 klausimų, įeinančių į egzaminų bilietus, studentas išmoko 50. Kokia tikimybė, jam ištraukti bilietą, kurio abu klausimus studentas moka ?

$$n = C_{60}^2,\ m = C_{50}^2,\ P(A) = \frac{C_{50}^2}{C_{60}^2} = \frac{245}{354}.$$

2.23. Pirmoje dėžėje yra 12 detalių, iš jų 5 nestandartinės. Antroje dėžėje yra 20 detalių, iš jų 4 nestandartinės. Iš kiekvienos dėžės atsitiktinai išimama viena detalė. Kokia tikimybė, kad abi detalės nestandartinės ?

A - iš pirmos dėžės atsitiktinai išimta detalė yra nestandartinė. $n = 12$, $m = 5$, $P(A) = \frac{5}{12}$.

B - iš antros dėžės atsitiktinai išimta detalė yra nestandartinė. $n = 20$, $m = 4$, $P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

C - iš dviejų dėžių atsitiktinai išimtos detalės yra nestandartinės. $P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{12}$.

2.24. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad pirmasis atsivers nelyginiu taškų skaičiumi, o antrasis - 6 taškais ?

Elementariųjų įvykių aibė $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n = 6$.

A - pirmasis kauliukas atsivertė nelyginiu taškų skaičiumi, $A = \{1, 3, 5\}$, $m = 3$, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

B - antrasis kauliukas atsivertė 6 taškais, $B = \{6\}$, $m = 1$, $P(B) = \frac{1}{6}$.

C - pirmasis kauliukas atsivertė nelyginiu taškų skaičiumi, o antrasis - 6 taškais, $P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

2.25. Degustatorius turi eilės tvarka išrikiuoti trijų rūšių A, B ir C arbatą pagal skonį. Kokia tikimybė, kad arbata *A*: a) gardžiausia; b) prasčiausia ?

$E = \{\{ABC\}, (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA)\}$, $n = 6$;

a) A - gardžiausia arbata A: $A = \{(ABC), (ACB)\}$,

$m=2$, $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$;

b) B - prasčiausia arbata A: $A=\{(\text{ABC}),(\text{ACB})\}$,

$m=2$, $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2.26. Bandymas turi dvi galimas baigtis, kurių tikimybės sutinka kaip 2 : 1. **Raskite tas tikimybes.**

Tegul baigties A_1 tikimybė $P(A_1)=2x$,

o baigties A_2 tikimybė $P(A_2)=x$.

$P(A_1)+P(A_2)=1$, $2x+x=1$, $3x=1$, $x=\frac{1}{3}$;

$P(A_1)=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $P(A_2)=\frac{1}{3}$.

2.27. Taikinys turi 5 sektorius: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. **Į juos pataikęs šaulys, gauna atitinkamai 1, 2, 3, 4, 5 taškus. Tikimybės pataikyti į sektorius yra:** $P(S_1)=0{,}25$, $P(S_1)=0{,}25$, $P(S_1)=0{,}25$, $P(S_1)=0{,}25$, $P(S_1)=0{,}25$. **Tikimybė, kad šaulys nepataitys į taikinį, lygi 0,1. Raskite šių įvykių tikimybes:**

A_k **- šaulys gaus ne mažiau kaip k taškų,** $k=1,\ldots,5$;

B **- šaulys gaus lyginį skaičių taškų.**

Elementariųjų įvykių aibė $E=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

A_1 - šaulys gaus ne mažiau kaip vieną tašką:

$A_1=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $P(A_1)=0{,}25+0{,}2+0{,}2+0{,}15+0{,}1=0{,}9$.

($\overline{A}_1$ - šaulys negaus taškų: $\overline{A}_1=\{0\}$, $P(\overline{A}_1)=0{,}1$,

$P(A_1)=1-P(\overline{A}_1)=1-0{,}1=0{,}9$).

A_2 - šaulys gaus ne mažiau kaip du taškus:

$A_2=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $P(A_2)=0{,}2+0{,}2+0{,}15+0{,}1=0{,}65$.

Taip pat sprendžiame su kitomis k reikšmėmis.

B - šaulys gaus lyginį skaičių taškų.

$B = \{2, 4\}$, $P(B) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$.

Ats.: $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}65$, $P(A_3) = 0{,}45$, $P(A_4) = 0{,}25$, $P(A_5) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}35$.

2.28. Elementariųjų įvykių aibę sudaro aštuoni elementarieji įvykiai $E_1, E_2, \ldots, E_8$, $P(E_i) = \frac{1}{8}$, $i = 1,\ldots,8$. $A = \{E_1, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$. **Apskaičiuokite tikimybes:**

a) $P(A)$, **b)** $P(\overline{A})$, **c)** $P(B)$, **d)** $P(\overline{B})$, **e)** $P(A \cup B)$, **f)** $P(A \cap B)$.

a) $n = 8$, $m = 3$, $P(A) = \frac{3}{8}$; b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$;

c) $n = 8$, $m = 3$, $P(B) = \frac{5}{8}$; d) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$;

e) $A \cup B = \{E_1, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$, $P(A \cup B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$;

f) $A \cap B = \{E_4, E_6\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Ats.: $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(\overline{A}) = \frac{5}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$, $P(\overline{B}) = \frac{3}{8}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

2.29. Bandymo elementariųjų įvykių aibę sudaro *n* elementariųjų įvykių. Kiek skirtingų įvykių (įskaitant būtinąjį ir negalimąjį įvykius) susiję su šiuo bandymu ?

$n = 0$, $C_0^0 = 1 = 2^0$; $n = 1$, $C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2 = 2^1$;

$n = 2$, $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$ ir t.t.

Kiekvienu atveju gauname 2^n skirtingų įvykių.

2.30. Kortelėse parašomi skaičiai 1, 2, 3, ..., 20. Jos sumaišomos ir dedamos į dėžutę. Nežiūrint traukiama viena kortelė. Kokia tikimybė, kad joje parašytas skaičius yra pirminis arba dalijasi iš 3 ?

$E=\{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$, $n=20$.

A - ištrauktas skaičius pirminis arba dalijasi iš 3:

$A=\{2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\}$,

$m=13$, $P(A)=\frac{13}{20}$.

2.31. Duotas sąrašas šeimų, auginančių po tris vaikus. Iš sąrašo atsitiktinai pasirenkame vieną šeimą. Apskaičiuokite tokių įvykių tikimybes:

A - **visi trys vaikai šeimoje - berniukai;**

B - **šeimoje du berniukai ir viena mergaitė;**

C - **šeimoje vienas berniukas ir dvi mergaitės;**

D - **šeimoje trys mergaitės.**

Elementariųjų įvykių aibė:

$E=\{(bbb),(bmm),(mbm),(mmb),(mbb),(bmb),(bbm),(mmm)\}$,

$n=8$. $A=\{(bbb)\}$, $m=1$, $P(A)=\frac{1}{8}$;

$B=\{(bbm),(bmb),(mbb)\}$, $m=3$, $P(B)=\frac{3}{8}$;

$C=\{(mmb),(mbm),(bmm)\}$, $m=3$, $P(C)=\frac{3}{8}$;

$D=\{(mmm)\}$, $m=1$, $P(D)=\frac{1}{8}$.

2.32. Į knygų lentyną sustatome keturtomę enciklopediją nežiūrėdami į tomų numerius. Apskaičiuokite šių įvykių tikimybes:

A - **visi tomai sudėti iš eilės;**

B - **vienas tomas yra savo vietoje;**

C - **du tomai yra savo vietoje;**

D - **bent vienas tomas savo vietoje;**

***F* - trys tomai yra savo vietoje;**
***G* - visi tomai yra ne vietoje.**

Kurie šių įvykių sudaro visos elementariųjų įvykių aibės *E* skaidinį ?

Apskaičiuojame, kiek iš viso yra elementariųjų įvykių:

$n=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$, $A=\{(\text{I II III IV})\}$, $m=1$, $P(A)=\dfrac{1}{24}$.

$B_1=\{(\text{I III IV II}),(\text{I IV II III})\}$, du įvykiai, kai pirmas tomas yra savo vietoje, o tomų yra keturi, todėl įvykiui B palankių elementarių įvykių yra $2\cdot4=8$, $m=8$, $P(B)=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$.

$C_1=\{(\text{I II IV III})\}$ vienas elementarus įvykis, kai I ir II tomai yra savo vietoje, o gali savo vietose būti I ir III, I ir IV, II ir III, II ir IV, III ir IV. Yra po vieną elementarųjį įvykį šiems šešiems atvejams, todėl įvykiui C palankių įvykių yra $1\cdot6=6$, $m=6$, $P(C)=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$.

Įvykis F - negalimas, nes kai trys tomai yra savo vietoje, tai ir ketvirtasis yra savo vietoje, $P(F)=0$.

Įvykį D sudaro įvykiai A, B, C.

$$P(D)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

$$G=\overline{D},\ P(\overline{D})=1-P(D)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8},\ P(G)=\frac{3}{8}.$$

Skaidinys yra tie įvykiai, kurių tikimybių suma lygi 1.

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(G)=\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=1,\ E=A\cup B\cup C\cup G.$$

$$P(D)+P(G)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1,\quad E=D\cup G.$$

Ats.: $P(A)=\dfrac{1}{24}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$, $P(C)=\dfrac{1}{4}$, $P(F)=0$, $P(D)=\dfrac{5}{8}$, $P(G)=\dfrac{3}{8}$.

2.33. Mini loto maišelyje yra 4 rutuliukai su numeriais nuo 1 iki 4.

1) Traukiami iš eilės 2 rutuliukai be grąžinimo. Raskite tikimybę įvykio: A **- ištraukti numeriai 1 ir 3.**

2) Traukiamas vienas rutuliukas, užrašomas jo numeris, o rutuliukas grąžinamas į maišelį. Po to traukiamas dar vienas rutuliukas ir užrašomas jo numeris. Raskite tikimybę įvykio: B **- ištraukti numeriai 1 ir 3.**

1) $E=\{(12),(13),(14),(21),(23),(24),(31),(32),(34),(41),(42),(43)\}$,

$n=12$, $A=\{(13),(31)\}$, $m=2$, $P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2) $E=\left\{\begin{matrix}(11),(12),(13),(14),(21),(22),(23),(24),\\(31),(32),(33),(34),(41),(42),(43),(44)\end{matrix}\right\}$, $n=16$,

$B=\{(13),(31)\}$, $m=2$, $P(B)=\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$.

2.34. Šaulys pataiko į taikinį su tikimybe $1/3$**. Jis šauna 3 kartus. Sudarykite elementarių įvykių aibę. Raskite elementariųjų įvykių tikimybes. Apskaičiuokite tikimybes šių įvykių, išreiškę juos elementariaisiais:**

A **- šaulys nepataikė daugiau kaip 2 kartus;**

B **- šaulys pataikė vieną kartą;**

C **- šaulys pataikė du kartus;**

D **- šaulys pataikė ne mažiau, kaip du kartus.**

P_a - pataikė, $\overline{P}_a$ - nepataikė. $P(P_a)=\frac{1}{3}$, $P(\overline{P}_a)=\frac{2}{3}$.

$$E=\left\{\begin{matrix}(P_aP_aP_a)(P_aP_a\overline{P}_a)(P_a\overline{P}_aP_a)(\overline{P}_aP_aP_a)\\(\overline{P}_a\overline{P}_a\overline{P}_a)(\overline{P}_a\overline{P}_aP_a)(\overline{P}_aP_a\overline{P}_a)(P_a\overline{P}_a\overline{P}_a)\end{matrix}\right\}.$$

$P(E_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$, $P(E_2)=P(E_3)=P(E_4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$,

$P(E_5)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$, $P(E_6)=P(E_7)=P(E_8)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$.

$$A=\{E_5\},\qquad P(A)=\frac{8}{27},$$

$$B=\{E_6,E_7,E_8\},\qquad P(B)=\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=\frac{12}{27},$$

$$C=\{E_2,E_3,E_4\},\qquad P(C)=\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}=\frac{6}{27},$$

$$D=\{E_1,E_2,E_3,E_4\},\quad P(D)=\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}=\frac{7}{27}.$$

2.35. Sukdamas "laimės ratą" vieną kartą, berniukas ką nors laimi su tikimybe, lygia $1/10$. Apskaičiuokite tikimybes tokių įvykių:

A - **berniukas laimės vieną kartą, bandęs 2 kartus;**
B - **laimės vieną kartą, bandęs 3 kartus;**
C - **laimės ne mažiau kaip du kartus, bandęs 3 kartus.**

L_a - laimės, $\bar{L}_a$ - nelaimės. $P(L_a)=\frac{1}{10}$, $P(\bar{L}_a)=\frac{9}{10}$.

$$E=\{(L_aL_a)(L_a\bar{L}_a)(\bar{L}_aL_a)(\bar{L}_a\bar{L}_a)\}.\quad A=\{E_2,E_3\},$$

$$P(E_2)=P(E_3)=\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{100},\quad P(A)=\frac{9}{100}+\frac{9}{100}=\frac{18}{100}=\frac{9}{50}.$$

$$E=\left\{\begin{matrix}(L_aL_aL_a)(L_aL_a\bar{L}_a)(L_a\bar{L}_aL_a)(\bar{L}_aL_aL_a)\\(\bar{L}_a\bar{L}_a\bar{L}_a)(\bar{L}_a\bar{L}_aL_a)(\bar{L}_aL_a\bar{L}_a)(L_a\bar{L}_a\bar{L}_a)\end{matrix}\right\},\quad B=\{E_6,E_7,E_8\},$$

$$P(E_6)=P(E_7)=P(E_8)=\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{81}{1000},$$

$$P(B)=\frac{81}{1000}+\frac{81}{1000}+\frac{81}{1000}=\frac{243}{1000}.$$

$$C=\{E_1,E_2,E_3,E_4\},\quad P(E_1)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000},$$

$$P(E_2)=P(E_3)=P(E_4)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{1000},$$

$$P(C)=\frac{1}{1000}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{1000}=\frac{7}{250}.$$

36. Futbolo komanda "Stumbras" prieš komandą "Lokys" laimi su tikimybe $1/2$, sužaidžia lygiosiomis su tikimybe $1/4$.

Apskaičiuokite tikimybes tokių įvykių:

A **- dviejose rungtynėse "Stumbras" surinks 4 taškus;**

B **- dviejose rungtynėse "Stumbras" surinks 3 taškus;**

C **- dviejose rungtynėse "Lokys" surinks ne mažiau, kaip 2 taškus;**

D **- trijose rungtynėse "Lokys" surinks ne mažiau, kaip 3 taškus;**

G **- trijose rungtynėse "Stumbras" surinks ne daugiau, kaip 3 taškus.**

Komanda "Stumbras". L_a - laimi, $\overline{L}_a$ - pralaimi,

L_y - lygiosios. $P(L_a)=\frac{1}{2}$, $P(\overline{L}_a)=\frac{1}{4}$, $P(L_y)=\frac{1}{4}$.

A - po dviejų rungtynių "Stumbras" surinko 2 taškus.

$$E=\{(L_aL_a)(L_a\overline{L}_a)(L_aL_y)(\overline{L}_a\overline{L}_a)(\overline{L}_aL_a)(\overline{L}_aL_y)(L_yL_y)(L_yL_a)(L_y\overline{L}_a)\}.$$

Surinkti keturis taškus galima tik abi rungtynes laimėjus.

$A=\{E_1\}$, $P(E_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{4}$.

B - po dviejų rungtynių "Stumbras" surinko 3 taškus.

Surinkti tris taškus galima vienas rungtynes laimėjus, o kitas sužaidus lygiosiomis.

$B=\{E_3,E_8\}$, $P(E_3)=P(E_8)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$.

C - po dviejų rungtunių "Lokys" surinko ne mažiau kaip 2 taškus. $C=\{E_4,E_6,E_9,E_2,E_5,E_7\}$.

$P(E_4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$, $P(E_6)=P(E_9)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$,

$P(E_2)=P(E_5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, $P(E_7)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.

$$P(E_4)+P(E_6)+P(E_9)+P(E_2)+P(E_5)+P(E_7)=$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}, \qquad P(C)=\frac{1}{2}.$$

D - po trijų rungtynių “Lokys” surinks ne mažiau, kaip 3 taškus. Kai po trijų rungtynių “Stumbras” surinks 0,1,2 ar 3 taškus, tada “Lokys” surinks 6, 5, 4 ir 3 taškus.

“Stumbras” surinks 0 taškų, kai $D_0=\left\{\left(\bar{L}_a\bar{L}_a\bar{L}_a\right)\right\}$,

vieną tašką - kai $D_1=\left\{\left(L_y\bar{L}_a\bar{L}_a\right), \left(\bar{L}_aL_y\bar{L}_a\right), \left(\bar{L}_a\bar{L}_aL_y\right)\right\}$,

$$P\left(L_y\bar{L}_a\bar{L}_a\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}, \quad P(D_1)=\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=\frac{3}{64}.$$

“Stumbras” surinks 2 taškus, kai

$$D_2=\left\{\left(L_yL_y\bar{L}_a\right), \left(L_y\bar{L}_aL_y\right), \left(\bar{L}_aL_yL_y\right), \left(\bar{L}_a\bar{L}_aL_a\right), \left(\bar{L}_aL_a\bar{L}_a\right), \left(L_a\bar{L}_a\bar{L}_a\right)\right\},$$

$$P(D_2)=\frac{1}{64}\cdot 3+\frac{1}{32}\cdot 3=\frac{9}{64}.$$

“Stumbras” surinks 3 taškus, kai

$$D_3=\left\{\begin{matrix}\left(L_aL_y\bar{L}_a\right), \left(L_a\bar{L}_aL_y\right), \left(L_y\bar{L}_aL_a\right), \left(\bar{L}_aL_aL_y\right), \\ \left(\bar{L}_aL_yL_a\right), \left(L_yL_aL_a\right), \left(L_yL_yL_y\right)\end{matrix}\right\},$$

$$P(D_3)=\frac{1}{32}\cdot 6+\frac{1}{64}=\frac{13}{64}. \quad P(D)=\frac{1}{64}+\frac{3}{64}+\frac{9}{64}+\frac{13}{64}=\frac{13}{32}.$$

G - po trijų rungtynių “Stumbras” surinks ne daugiau, kaip 3 taškus.

Visi galimi atvejai aptarti nagrinėjant D įvykį. $P(G)=\frac{13}{32}$.

2.37. Metami du lošimo kauliukai - raudonas ir baltas. Tegul r - raudonojo kauliuko atsivertusių akučių skaičius, b - baltojo kauliuko atsivertusių akučių skaičius. Apskaičiuoti sąlygines šių įvykių tikimybes:

a) A - $r=6$ **su sąlyga, kad** $r+b\geq 10$;

b) B - $r\geq 3$ **su sąlyga, kad** $r+b=9$;

c) F - $r+b=5$ **su sąlyga, kad** $|r-b|$ **- pirminis skaičius.**

$$E=\begin{Bmatrix}(11),(12),(13),(14),(15),(16),\\(21),(22),(23),(24),(25),(26),\\(31),(32),(33),(34),(35),(36),\\(41),(42),(43),(44),(45),(46),\\(51),(52),(53),(54),(55),(56),\\(61),(62),(63),(64),(65),(66)\end{Bmatrix},\ n=36.$$

Sąlyginio įvykio tikimybė apskaičiuojama taip:

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}.$$

a) A_1 - $r=6$: $A_1=\{(61),(62),(63),(64),(65),(66)\}$, $m=6$,

$P(A_1)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$;

A_2 - $r+b\geq 10$: $A_2=\{(46),(55),(56),(64),(65),(66)\}$, $m=6$,

$P(A_2)=\frac{1}{6}$;

$A_1\cap A_2=\{(64),(65),(66)\}$, $m=3$, $P(A_1\cap A_2)=\frac{1}{12}$;

$$P(A)=P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

b) B_1 - $r\geq 3$: $B_1=\begin{Bmatrix}(31),(32),(33),(34),(35),(36),\\(41),(42),(43),(44),(45),(46),\\(51),(52),(53),(54),(55),(56),\\(61),(62),(63),(64),(65),(66)\end{Bmatrix}$, $m=24$,

$P(B_1)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$; B_2 - $r+b=9$: $B_2=\{(36),(45),(54),(63)\}$,

$m=4$, $P(B_2)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $B_1\cap B_2=\{(36),(45),(54),(63)\}$, $m=4$,

$$P(B_1\cap B_2)=\frac{1}{9};\quad P(B)=P(B_1|B_2)=\frac{P(B_1\cap B_2)}{P(B_2)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}=1.$$

c) F_1 - $r+b=5$: $F_1=\{(14),(23),(32),(41)\}$, $m=4$, $P(F_1)=\frac{1}{9}$;

F_2 - $|r-b|$ - pirminis skaičius:

$$F_2=\begin{Bmatrix}(13),(14),(16),(24),(25),\\(31),(35),(36),(41),(42),(46),\\(52),(53),(61),(63),(64)\end{Bmatrix},\ m=16,\ P(F_2)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9};$$

$$F_1\cap F_2=\{(14),(41)\},\ m=2,\ P(F_1\cap F_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18};$$

$$P(F)=P(F_1|F_2)=\frac{P(F_1\cap F_2)}{P(F_2)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{8}.$$

Ats.: $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=1$, $P(F)=\frac{1}{8}$.

2.38. Įvykis *A* įvyksta visada, kai įvyksta įvykis *B*. Aibės *B* kiekvienas elementarusis įvykis priklauso aibei *A*. Ką galima pasakyti apie tikimybę $P(A|B)$?

$B\subset A$, tai $A\cap B=B$, todėl $P(A\cap B)=P(B)$,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1.$$

2.39. Dėžėje yra 20 vienodo didumo rutulių. 8 balti rutuliai pažymėti skaitmeniu 1, 7 balti - skaitmeniu 2, 3 juodi - skaitmeniu 1 ir 2 juodi - skaitmeniu 2. Ištraukiamas vienas rutulys. Apskaičiuokite tikimybę ištraukti baltą rutulį su sąlyga, kad jis bus pažymėtas skaitmeniu 2.

$$E=\begin{Bmatrix}b_1,b_1,b_1,b_1,b_1,b_1,b_1,b_1,\\b_2,b_2,b_2,b_2,b_2,b_2,\\j_1,j_1,j_1,j_2,j_2\end{Bmatrix},\ n=20.$$

A - ištrauktas baltas rutulys su sąlyga, kad jis pažymėtas skaitmeniu 2,

A_1 - ištrauktas baltas rutulys: $A_1 = \left\{ \begin{matrix} b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, \\ b_2, b_2, b_2, b_2, b_2, b_2 \end{matrix} \right\}$,

$m = 15$, $P(A_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$;

A_2 - ištrauktas rutulys, pažymėtas skaitmeniu 2,

$A_2 = \{b_2, b_2, b_2, b_2, b_2, b_2, j_2, j_2\}$, $m = 9$, $P(A_2) = \frac{9}{20}$;

$A_1 \cap A_2 = \{b_2, b_2, b_2, b_2, b_2, b_2\}$, $m = 7$, $P(A_1 \cap A_2) = \frac{7}{20}$;

$$P(A) = P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{7}{20} : \frac{9}{20} = \frac{7}{9}.$$

2.40. Moneta mėtoma tol, kol atsiverčia herbas arba kol tris kartus atsiverčia skaičius. Raskite tikimybę, kad moneta mesta tris kartus, su sąlyga, kad pirmą kartą atsivertė skaičius.

s - atsivertė skaičius, h - atsivertė herbas.

Kai pirmą kartą atsivertė skaičius, o moneta mesta tris kartus, tai elementariųjų įvykių aibė yra tokia
$E = \{(ssh)(sss)(shs)(shh)\}$, $n = 4$.

Mus dominančiam įvykiui A palankūs šie elementarieji įvykiai: (ssh) ir (sss). $A = \{(ssh)(sss)\}$, $m = 2$, $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2.41. Moneta mėtoma tol, kol atsiverčia herbas arba keturis kartus atsiverčia skaičius. Pirmuosius abu kartus atsivertė skaičius. Raskite tikimybę, kad:

a) moneta mesta tris kartus;

b) moneta mesta keturis kartus.

a) Kai pirmuosius du kartus atsivertė skaičius, o moneta mesta tris kartus, tai elementariųjų įvykių aibė yra tokia:
$E = \{(ssh)(sss)\}$, $n = 2$.

Mus dominančiam įvykiui A palankus tik (ssh) elementarusis įvykis. $A=\{(ssh)\}$, $m=1$, $P(A)=\frac{1}{2}$.

b) Kai pirmuosius du kartus atsivertė skaičius, o moneta mesta keturis kartus, tai elementariųjų įvykių aibė yra tokia: $E=\{(sssh)(sshs)(sshh)(ssss)\}$, $n=4$.

Mus dominančiam įvykiui A palankūs šie elementarieji įvykiai: $(sssh)$ ir $(ssss)$. $A=\{(sssh)(ssss)\}$, $m=2$, $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

2.42. Metamas lošimo kauliukas. Jei atsiverčia mažiau nei 5 akutės, tai žaidėjas *A* moka žaidėjui *B* 10 centų, jei atsiverčia daugiau nei 4 akutės, tai *A* gauna iš žaidėjo *B* 20 centų. Parašyti atsitiktinio dydžio, reiškiančio žaidėjo *A* išloštą sumą, skirstinį. Rasti jo vidurkį (matematinę viltį) ir dispersiją.

Pagalbinis skirstinys:

X	-10	-10	-10	-10	20	20
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Skirstinys:

X	-10	20
P	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$

Vidurkis $MX=-10\cdot\frac{4}{6}+20\cdot\frac{2}{6}=0$.

Sudarome naują skirstinį:

$(X-MX)^2$	$(-10-0)^2$	$(20-0)^2$
P	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$

Dispersija $DX=M(X-MX)^2$.

$(-10-0)^2=100$, $(20-0)^2=400$, $DX=100\cdot\frac{4}{6}+400\cdot\frac{2}{6}=200$.

Ats.: $MX=0$, $DX=200$.

2.43. Atsitiktinis dydis gali įgyti tik vieną reikšmę su tikimybe lygia 1. Įrodykite, kad šio atsitiktinio dydžio dispersija lygi nuliui.

x_1 - atsitiktinio dydžio įgyjama reikšmė.

Skirstinys:

X	x_1
P	1

Vidurkis $MX = x_1 \cdot 1 = x_1$.

Naujas skirstinys:

$(X - MX)^2$	$(x_1 - x_1)^2$
P	1

Dispersija $DX = MX(X - MX)^2$, $(x_1 - x_1)^2 = 0$, $DX = 0 \cdot 1 = 0$.

2.44. Atsitiktinis dydis *X* **yra vieną kartą metus lošimo kauliuką pasirodžiusių taškų skaičius. Raskite** *MX*.

Skirstinys:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$MX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

2.45. Iš dėžės, kurioje yra 2 raudoni ir 3 juodi rutuliai, atsitiktinai ištraukiami du rutuliai. Raskite *MX*, **kai** *X* **- ištrauktų raudonų rutulių skaičius.**

Traukiant du rutulius galima ištraukti abu raudonus, arba vieną raudoną, o kitą juodą, arba abu juodus.

X_1 - abu rutuliai raudoni.

$$n = C_5^2 = 10, \quad m = C_2^2 = 1. \quad P(X_1) = \frac{1}{10}.$$

X_2 - vienas rutuliys raudonas, o kitas - juodas.

$$n = C_5^2 = 10, \quad m = C_2^1 \cdot C_3^1 = 6. \quad P(X_2) = \frac{6}{10}.$$

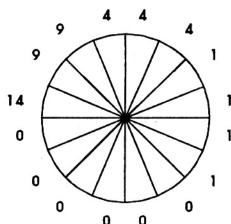
Gavome skirstinį:

X	2	1
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$MX = 2 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = 0{,}8 .$$

2.46. Loterijos skritulys suskirstytas į 16 vienodų sektorių, iš kurių vienas sektorius pažymėtas skaičiumi 14, du sektoriai pažymėti skaičiumi 9, trys sektoriai pažymėti skaičiumi 4, keturi sektoriai pažymėti skaičiumi 1, visi likę sektoriai pažymėti skaičiumi 0. Bilietas, leidžiantis sukti ratą vieną kartą kainuoja 4 centus. X **- laimėjimo dydis - "išsuktas" skaičius, minus bilieto kaina. Raskite** X **pasiskirstymą. Pavaizduokite jį grafiškai. Apskaičiuokite vidurkį (matematinę viltį), dispersiją.**

Apskaičiuokite tikimybes įvykių: $\{0 < X\}$, $\{-3 \le X < 10\}$, $\{MX - \sqrt{DX} \le X \le MX + \sqrt{DX}\}$, $\{MX - 2\sqrt{DX} \le X \le MX + 2\sqrt{DX}\}$.

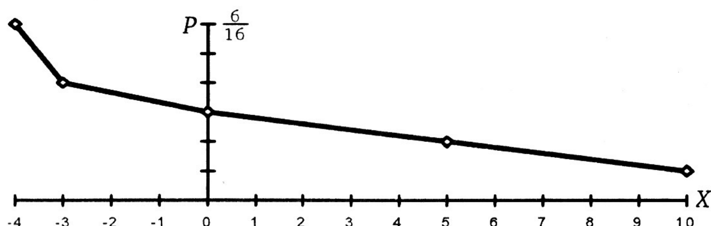


X	10	5	5	0	0	0	-3	-3
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

X	-3	-3	-4	-4	-4	-4	-4	-4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Skirstinys:

X	-4	-3	0	5	10
P	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$



$$MX=-4\cdot\frac{6}{16}-3\cdot\frac{4}{16}+0\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{2}{16}+10\cdot\frac{1}{16}=-1.$$

$(X-MX)^2$	$(-4-(-1))^2$	$(-3-(-1))^2$	$(0-(-1))^2$	$(5-(-1))^2$	$(10-(-1))^2$
P	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$(-4-(-1))^2=9$; $(-3-(-1))^2=4$; $(0-(-1))^2=1$;

$(5-(-1))^2=36$; $(10-(-1))^2=121$.

$$DX=M(X-MX)^2=9\cdot\frac{6}{16}+4\cdot\frac{4}{16}+1\cdot\frac{3}{16}+36\cdot\frac{2}{16}+121\cdot\frac{1}{16}=$$
$$=14\frac{1}{8}=14{,}125.$$

$$P\{X<0\}=P\{X=-4\}+P\{X=-3\}=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}=\frac{5}{8},$$

$$P\{0<X\}=P\{X=5\}+P\{X=10\}=\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16},$$

$$P\{-3\le X\le 10\}=P\{X=-3\}+P\{X=0\}+P\{X=5\}=\frac{4}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}=\frac{9}{16}.$$

$MX=-1$; $DX=14{,}125$; $\sqrt{DX}=\sqrt{14{,}125}\approx 4{,}08$.

$$P\{MX-\sqrt{DX}\le X\le MX+\sqrt{DX}\}=P\{-1-4{,}08\le X\le -1+4{,}08\}=$$
$$=P\{-5{,}08\le X\le 3{,}08\}=P\{X=-4\}+P\{X=-3\}+P\{X=0\}=$$
$$=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{3}{16}=\frac{13}{16}.$$

$$P\{MX-2\sqrt{DX}\le X\le MX+2\sqrt{DX}\}=P\{-1-2\cdot 4{,}08\le X\le -1+2\cdot 4{,}08\}=$$
$$=P\{-9{,}16\le x\le 7{,}16\}=P\{X=-4\}+\{X=-3\}+P\{X=0\}+P\{X=5\}=$$
$$=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}=\frac{15}{16}.$$

2.47. Atsitiktinio dydžio X **skirstinys -** $P\{X=k\}=C_5^k\frac{1}{2^5}$, $k=1,2,3,4,5$**. Užrašykite jį lentele. Pavaizduokite grafiškai. Apskaičiuokite šias tikimybes:** $P\{X\le 5\}$, $P\{6\le X\}$,

$P\{X \le 0\}$, $P\{0 < X\}$. **Raskite *X* vidurkį ir dispersiją.**

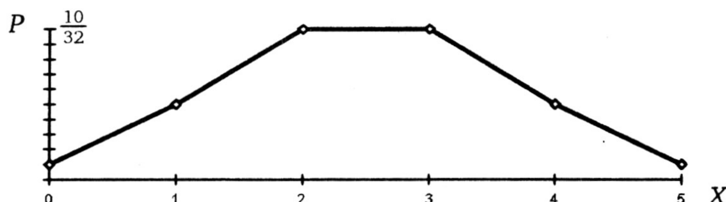
$$P\{X=0\}=C_5^0\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32},\qquad P\{X=1\}=C_5^1\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32},$$

$$P\{X=2\}=C_5^2\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32},\qquad P\{X=3\}=C_5^3\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32},$$

$$P\{X=4\}=C_5^4\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32},\qquad P\{X=0\}=C_5^5\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}.$$

Skirstinys:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$



$$P\{X \le 5\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}+ +P\{X=4\}+P\{X=5\}=1,$$

$$P\{6 \ge X\}=0,\quad P\{X \le 0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{32},$$

$$P\{0<X\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}+P\{X=4\}+ +P\{X=5\}=1-P\{X=0\}=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}.$$

$$MX=0\cdot\frac{1}{23}+1\cdot\frac{5}{32}+2\cdot\frac{10}{32}+3\cdot\frac{10}{32}+4\cdot\frac{5}{32}+5\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

$(X-MX)^2$	$(0-2{,}5)^2$	$(1-2{,}5)^2$	$(2-2{,}5)^2$	$(3-2{,}5)^2$	$(4-2{,}5)^2$	$(5-2{,}5)^2$
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$(0-2{,}5)^2=\frac{25}{4}\qquad (1-2{,}5)^2=\frac{9}{4}\qquad (2-2{,}5)^2=\frac{1}{4}$$

$$(3-2{,}5)^2=\frac{1}{4}\qquad (4-2{,}5)^2=\frac{9}{4}\qquad (5-2{,}5)^2=\frac{25}{4}.$$

$$DX = M(X - MX)^2 = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{32} + \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{32} + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{32} + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{32} + \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{32} +$$
$$+ \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

2.48. Lentelėje pateikti bandymo su vienodai tikėtinomis baigtimis atsitiktiniai dydžiai:

Dydžiai	Baigtys					
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
X	5	2	-1	2	3	5
Y	2	0	0	-2	3	0
Z	4	1	0	0	-1	-4

Raskite atsitiktinių dydžių X, Y **ir** Z **vidurkius ir dispersijas.**

Pirmasis skirstinys:

X	-1	2	3	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

$$MX = -1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3},$$

$$DX = M(X - MX)^2 = \left(-1 - \frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} + \left(3 - \frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ \left(5 - \frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{54} \cdot 228 = 4\frac{2}{9}\ .$$

Antrasis skirstinys:

Y	-2	0	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

$$MY = -2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

$$DY = \left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1}{24} \cdot 62 = 2\frac{7}{12}\ .$$

Trečiasis skirstinys:

Z	-4	-1	0	1	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$MZ = -4 \cdot \frac{1}{6} + -1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0,$$

$$DZ = (-4-0)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1-0)^2 \cdot \frac{1}{6} + (0-0)^2 \cdot \frac{2}{6} + (1-0)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$

$$+ (4-0)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 34 = 5\frac{2}{3} \ .$$

MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS

Statistiniam tyrimui pasirinkta tiriamų objektų dalis vadinama imtimi. Imties elementai $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Grafinis imties vaizdas - diagrama, histograma.

Imties plotis (r) - didžiausios ir mažiausios imties reikšmių skirtumas.

Imties centras (c) - didžiausios ir mažiausios imties reikšmių aritmetinis vidurkis.

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_N$ vidurkiu vadinamas aritmetinis vidurkis

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_N\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i .$$

Sugrupuotos imties vidurkis, kai k - grupių skaičius:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left(y_1 n_1 + y_2 n_2 + \ldots + y_k n_k\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} y_i n_i .$$

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_N$ dispersija:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\left(\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_N - \bar{x}\right)^2\right) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

Sugrupuotiems duomenims: $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k}\left(y_i - \bar{x}\right)^2 n_i .$

Skaičiavimą palengvina formulė:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 .$$

Vidutinis kvadratinis nuokrypis (standartas):

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} .$$

3.1. Duota imtis: 5, 2, 1, 1, 3. Apskaičiuokite imties plotį r**, centrą** c**, vidurkį** $\bar{x}$**, dispersiją** s^2 **ir kvadratinį nuokrypį** s**.**

Imtis	1	2	3	5
Dažnis	2	1	1	1

$$r=5-1=4, \quad c=\frac{5+1}{2}=3, \quad \bar{x}=\tfrac{1}{5}(5+2+1+1+3)=2{,}4,$$

$$s^2=\frac{1}{5-1}\left((5-2{,}4)^2+(2-2{,}4)^2+2\cdot(1-2{,}4)^2+(3-2{,}4)^2\right)=2{,}8,$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{2{,}8}\approx 1{,}67.$$

3.2. Duota imtis: 0, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 1. Apskaičiuokite imties skaitines charakteristikas r, c, $\bar{x}$, s^2, s

Imtis	0	1	2	3
Dažnis	1	4	2	1

$$r=3-0=3, \quad c=\frac{0+3}{2}=1{,}5, \quad \bar{x}=\tfrac{1}{8}(0+1\cdot 4+2\cdot 2+3\cdot 1)=1{,}375,$$

$$s^2=\frac{1}{8-1}\begin{pmatrix}(0-1{,}375)^2+(1-1{,}375)^2\cdot 4+\\ +(2-1{,}375)^2\cdot 2+(3-1{,}375)^2\end{pmatrix}=0{,}839,$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{0{,}839}\approx 0{,}916.$$

3.3 Šeši mokiniai skaičiavo raidžių A ir Ž dažnius įvairiuose tekstuose:

a) A raidės dažniai: 0,0978; 0,0777; 0,087; 0,1175; 0,0808; 0,0923;

b) Ž raidės dažniai: 0,0076; 0,0065; 0,0073; 0,0103; 0,0064; 0,00601.

Apskaičiuokite abiejų imčių skaitines charakteristikas r, c, $\bar{x}$**,** s^2 **ir s.**

a) $r=0{,}1175-0{,}0777=0{,}0398$, $c=\dfrac{0{,}1175+0{,}0777}{2}=0{,}0976$,

$$\bar{x}=\tfrac{1}{6}(0{,}0978+0{,}0777+0{,}087+0{,}1175+0{,}0808+0{,}0923)=0{,}9218,$$

$$s^2=\frac{1}{6-1}\begin{pmatrix}(0{,}0978-0{,}9218)^2+(0{,}0777-0{,}9218)^2+\\+(0{,}087-0{,}9218)^2+(0{,}1175-0{,}9218)^2+\\+(0{,}0808-0{,}9218)^2+(0{,}0923-0{,}9218)^2\end{pmatrix}=0{,}0002,$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{0{,}0002}\approx 0{,}0144\approx 1{,}44\cdot 10^{-2}.$$

b) $r=0{,}0103-0{,}00601=0{,}00429$,

$$c=\frac{0{,}0103+0{,}00601}{2}=0{,}008155,$$

$$\bar{x}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0{,}0076+0{,}0065+0{,}0073+\\+0{,}0103+0{,}0064+0{,}00601\end{pmatrix}=0{,}00735=7{,}35\cdot 10^{-3},$$

$$s^2=\frac{1}{6-1}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}0076^2+0{,}0065^2+0{,}0073^2+\\0{,}0103^2+0{,}0064^2+0{,}00601^2\end{pmatrix}-\\-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0{,}0076+0{,}0065+0{,}0073+\\+0{,}0103+0{,}0064+0{,}00601\end{pmatrix}^2\end{pmatrix}=2{,}438\cdot 10^{-6},$$

$$s=\sqrt{s^2}\approx\sqrt{2{,}438\cdot 10^{-6}}\approx 0{,}00156\approx 1{,}56\cdot 10^{-3}.$$

3.4. Duota imtis: 1, 3, 100, 102, 105, 109. Apskaičiuokite imties centrą ir vidurkį.Kuri charakteristika yra tinkamesnė?

$$c=\frac{109+1}{2}=55,\qquad \bar{x}=\tfrac{1}{6}(1+3+100+102+105+109)=70;$$

Tinkamesnė charakteristika - vidurkis.

3.6. Du mokiniai A ir B pro mikroskopą stebėjo tą pačią bakterijų koloniją. Abu skaičiavo bakterijas po 4 kartus. Stebėjimo duomenys:

A: 46, 52, 51, 48; B: 47, 56, 44, 53.

Apskaičiuokite abiejų imčių skaitines charakteristikas $\bar{x}, s^2, s$. Kuris mokinys geriau skaičiavo ?

A imtis: $\bar{x}=\tfrac{1}{4}(49+52+51+48)=50$,

$$s^2=\frac{1}{4-1}\left((49-50)^2+(52-50)^2+(51-50)^2+(48+50)^2\right)=10,$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{10}\approx 3{,}33.$$

B imtis: $\bar{x}=\frac{1}{4}(47+56+44+53)=50$,

$$s^2=\frac{1}{4-1}\left((47-50)^2+(56-50)^2+(44-50)^2+(53-50)^2\right)=30,$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{30}\approx 5{,}48.$$

Geriau skaičiavo A mokinys, nes jo rezultatai mažiau išsibarstę.

3.8. Apskaičiuokite imties vidurkį $\bar{x}$, dispersiją s^2 ir kvadratinį nuokrypį *s*. Matavome 40-ties šešiolikmečių jaunuolių ūgį ir užrašėme matavimo rezultatus:
155, 170, 169, 186, 182, 173, 177, 171, 169, 159, 191, 186, 183, 158, 149, 167, 174, 176, 170, 179, 171, 175, 182, 183, 168, 173, 172, 192, 181, 177, 179, 173, 175, 169, 174, 180, 183, 177, 187, 173.

149	155	158	159	167	168	169	170	171	172	173	174
1	1	1	1	1	1	3	2	2	1	4	2

175	176	177	179	180	181	182	183	186	187	191	192
2	1	3	2	1	1	2	3	2	1	1	1

$$\bar{x}=\frac{1}{40}\left(\begin{array}{l}149+155+158+159+167+168+169\cdot 3+\\170\cdot 2+171\cdot 2+172+173\cdot 4+174\cdot 2+175\cdot 2+\\176+177\cdot 3+179\cdot 2+180+181+182\cdot 2+\\183\cdot 3+186\cdot 2+187+191+192\end{array}\right)=174{,}7,$$

$$s^2=\frac{1}{40-1}\left(\begin{array}{l}(149-174{,}7)^2+(155-174{,}7)^2+\\+(158-174{,}7)^2+\ldots+(192-174{,}7)^2\end{array}\right)=83{,}96,$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{83{,}96}\approx 9{,}163.$$

3.9. Farmacininkai tyrė, per kiek minučių ištirpsta piliulė. Jie gavo imtį:

15	18	19	21	23	26	17	18	24	20	13	10	16	11	9
12	14	10	19	13	20	15	11	18	15	21	12	19	18	22

Nubrėžkite histogramą ir apskaičiuokite imties skaitines charakteristikas $\bar{x}$, s^2 ir s.

Sugrupuota imtis:

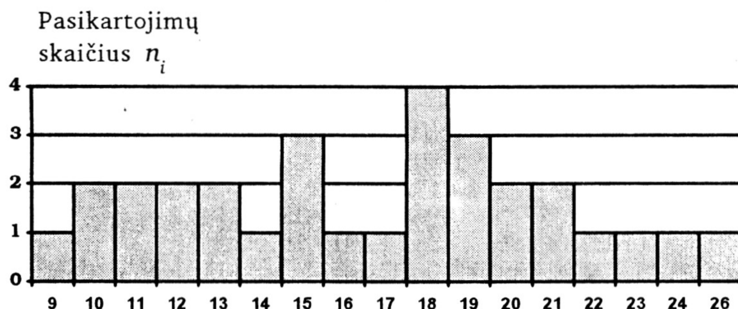
Imtis	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	26
Dažnis	1	2	2	2	2	1	3	1	1	4	3	2	2	1	1	1	1
Santykinis dažnis	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$

$$\bar{x}=\frac{1}{30}(9+10\cdot 2+11\cdot 2+12\cdot 2+13\cdot 2+\ldots+26)=16{,}63,$$

$$s^2=\frac{1}{30-1}\left((9-16{,}63)^2+(10-16{,}63)^2\cdot 2+(11-16{,}63)^2\cdot 2+\ldots\right)=20{,}38,$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{20{,}38}\approx 4{,}51;$$

Nubrėžiame histogramą - grafinį imties vaizdą. Suskirstom intervalą $[x_{min}; x_{max}]$, (šiuo atveju $[9; 26]$) į dalinius intervalus. Čia patogu, kai dalinio intervalo ilgis yra vienetas.



3.10. Draudimo bendrovė surinko duomenis apie apdraudžiamų automobilių kainą (tūkst. dolerių):

2,0 3,0 2,4 1,7 2,4 2,7 3,4 9,9 6,4 1,0 1,6 1,4
1,5 1,3 2,1 4,4 5,8 5,6 3,3 2,0 1,0 1,5 2,2 1,8
3,5 3,4 1,7 2,5 0,5 1,6 1,4 5,0 2,2 3,1 1,1 1,4.

Nubrėžkite histogramą ir apskaičiuokite imties skaitines charakteristikas $\bar{x}$, s^2 ir s.

Sugrupuota imtis:

Imtis	0,5	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	2,0	2,1	2,2	2,4
Dažnis	1	2	1	1	3	2	2	2	1	2	1	2	2
Santykinis dažnis	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

Imtis	2,5	2,7	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	4,4	5,0	5,6	5,8	6,4	9,9
Dažnis	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
Santykinis dažnis	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\bar{x} = \tfrac{1}{36}(0,5 + 1,0 \cdot 2 + 1,1 + 1,3 + 1,4 \cdot 3 + \ldots + 9,9) = 2,717,$$

$$s^2 = \frac{1}{36-1}\left((0,5-2,717)^2 + (1,0-2,717)^2 \cdot 2 + \ldots + (9,9-2,717)^2\right) = 3,552,$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3,552} \approx 1,885;$$

Suskirstome intervalą $[0,5;\ 9,9]$ į dalinius intervalus, kurių ilgis $h = \dfrac{9,9-0,5}{36} = 0,26$, $t_1 = x_{\min} - \frac{h}{2} = 0.5 - 0.13 = 0.37$, $t_2 = t_1 + h = 0,37 + 0,26 = 0,63$, ... , $t_k < x_{\max}$;

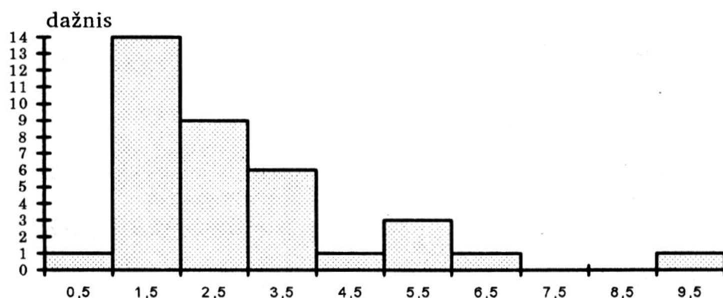
Surandame dalinių intervalų vidurio taškus $z_i = \dfrac{t_i + t_{i+1}}{2}$, $i = 1,2,\ldots,k$; Sudarome lentelę, kurioje z_i - t_i intervalo vidurio taškas, n_i - kiek imties reikšmių pateko į tą intervalą, $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ - santykinis dažnis.

Šiame uždavinyje $N = 36$.

t_i	[0,37;0,63)	[0,63;0,89)	[0,89;1,15)	[1,15;1,41)	[1,41;1,67)	...
z_i	0,5	0,76	1,02	1,28	1,54	...
n_i	1	0	1	4	4	...
f_i	0,03	0	0,03	0,11	0,11	...

Galėtume brėžti histogramą. Patogiau, kai intervalo plotį pasirenkame lygų vienetui, suskaičiuojame, kiek imties reikšmių pateko į kiekvieną intervalą, po to brėžiame histogramą.

t_i	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9;10)
z_i	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
n_i	1	14	9	6	1	3	1	0	0	1
f_i	0,03	0,39	0,25	0,17	0,03	0,08	0,03	0	0	0,03

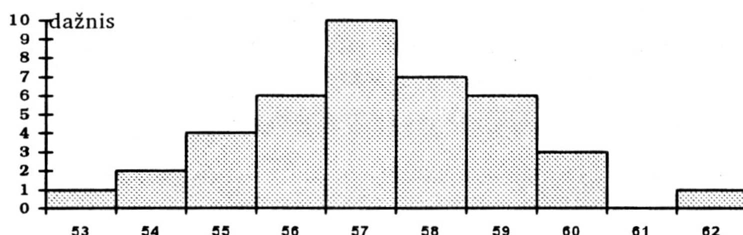


3.11. Nubrėžkite imties histogramą. Apskaičiuokite imties vidurkį $\overline{x}$ ir dispersiją s^2. Duoti 40-ties vyrų kepurių dydžiai:

Imtis	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
Dažnis	1	2	4	6	10	7	6	3	0	1
Santykinis dažnis	0,025	0,05	0,1	0,15	0,25	0,275	0,15	0,075	0	0,025

$$\overline{x}=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}53+54\cdot2+55\cdot4+56\cdot6+57\cdot10+\\+58\cdot7+59\cdot6+60\cdot3+62\end{pmatrix}=57{,}225,$$

$$s^2=\frac{1}{40-1}\left((53-57{,}225)^2+(54-57{,}225)^2+(55-57{,}225)^2+\ldots\right)=3{,}512;$$



3.12. Tiriant medienos išteklius, buvo skaičiuojami medžiai, kurių kamieno skersmuo didesnis negu 30 cm. Suskaičiuota po kiek tokių medžių buvo 50-tyje atsitiktinai parinktų 1 ha ploto miško sklypų:

4, 5, 4, 6, 2, 4, 3, 5, 3, 2, 5, 6, 5, 4, 1, 5, 0, 5, 3, 5, 1, 4, 2, 4, 3, 6, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 3, 6, 5, 7, 8, 7, 6, 6, 5, 9, 2, 8, 7, 4, 4, 5, 6.

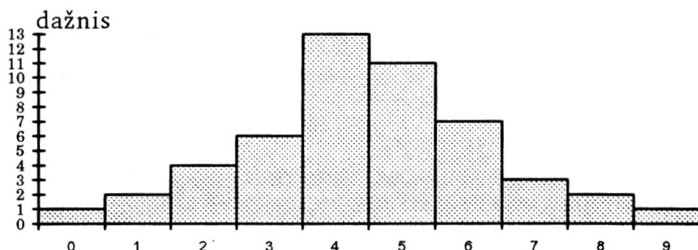
Nubrėžkite histogramą. Apskaičiuokite $\bar{x}$, s^2 ir s **.**

Sutvarkyta imtis:

Imtis	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dažnis	1	2	4	6	13	11	7	3	2	1
Santykinis dažnis	0,02	0,04	0,08	0,12	0,26	0,22	0,14	0,06	0,04	0,02

$$\bar{x} = \frac{1}{50}(1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 13 + 5\cdot 11 + 6\cdot 7 + 7\cdot 3 + 8\cdot 2 + 9) = 4{,}46\,,$$

$$s^2 = \frac{1}{50-1}\left((0-4{,}46)^2 + (1-4{,}46)^2 + (2-4{,}46)^2 + \ldots\right) = 3{,}437\,.$$



3.16. Remdamiesi 3.7 uždavinio duomenimis, apskaičiuokite tikimybę, kad piliulės tirpimo laikas X **yra iš intervalo** $17 < X < 20$**, kai** $\bar{x} = 16{,}63$, $s = 4{,}5$.

Standartinio normaliojo dydžio reikšmės, atitinkančios 17 ir 20: $y_1 = \dfrac{17 - 16{,}63}{4{,}51} = 0{,}082$, $y_2 = \dfrac{20 - 16{,}63}{4{,}51} = 0{,}747$;

$$P(17 \leq X \leq 20) = P(0{,}082 \leq Y \leq 0{,}747) =$$
$$= P(0 \leq Y \leq 0{,}082) + P(0 \leq Y \leq 0{,}747) = 0{,}273 - 0{,}032 = 0{,}24.$$

Naudojamės normaliosios kreivės plotų lentele [1, 91 psl.]. Reikšmę 0,747 atitinka 0,273, o 0,082 atitinka 0,032.

LITERATŪRA

1. **Plikusas "Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys (XI - XII klasėms)", Kaunas, "Šviesa", 1993, 95 psl.**
2. **Razmas "Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys", Vilnius, 1994, 58 psl.**
3. **Survila "Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos uždavinių rinkinys", Liet. Resp. šv. ir mokslo ministerijos Leidybos centras, Vilnius, 1994, 48 psl.**

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS MOKSLEIVIAMS.

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

SL 183. 1995 05 05. 3,5 sp. l. Tir. 2000 egz. Užsakymas 4314. Leido ir spausdino valst. „Aušros" spaustuvė, Vytauto pr. 23, 3000 Kaunas. Sutartinė kaina.